3次元接触多様体の部分多様体論 (部分多様体の微分幾何学の深化)

AUTHOR(S):

井ノ口, 順一

CITATION:

井ノ口, 順一. 3次元接触多様体の部分多様体論 (部分多様体の微分幾何学の深化). 数理解析研究所講究録 2014, 1880: 72-99

ISSUE DATE:

2014-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/195635

数理解析研究所講究録
第 1880 巻 2014 年 72-99

3次元接触多様体の部分多様体論

Submanifold geometry of contact 3-manifolds

山形大学理学部
井ノ口順一 (Jun-ichi Inoguchi)
Department of Mathematical Sciences,
Yamagata University

概要

The purpose of this paper is to report recent progress in geometry of submanifolds in 3-dimensional homogeneous contact manifolds equipped with invariant Riemannian metric. Particular attentions are paid for the following ambient spaces: the unit 3-sphere $\mathbb{S}^3$, the real special linear group $SL_2\mathbb{R}$, the Heisenberg group Nil_3 and the model space Sol_3 of solvgeometry in the sense of Thurston. We also study $SL_2\mathbb{R}$ equipped with invariant Lorenztian metric of constant curvature -1 (The resulting Lorentzian 3-manifold is identified with anti de Sitter 3-spacetime). More precisely, we discuss (1) loop group method for minimal surfaces in $\mathbb{S}^3$ and maximal surfaces in anti de Sitter spacetime AdS_3, (2) timelike flat surfaces in $SL_2\mathbb{R}$ and AdS_3, (3) loop group method for minimal surfaces in Nil_3, (4) integral representation formula for minimal surfaces in Sol_3, (5) slant curves in Nil_3, $\mathbb{S}^3$, $SL_2\mathbb{R}$ as well as the Berger 3-sphere.

はじめに

本稿では3次元接触多様体の典型例である3次元球面 $\mathbb{S}^3$, ハイゼンベルグ群 Nil_3, 特殊線型群 $SL_2\mathbb{R}$, 可解リー群 Sol_3 の曲面の微分幾何について，これまで得られた研究成果について報告する．とくに特殊線型群 $SL_2\mathbb{R}$ は2つの計量を用いて考察する．第一の計量は左不変リーマン計量であり，その計量に関し $SL_2\mathbb{R}$ は佐々木空間形となるものである．もうひとつは定曲率 -1 の両側不変ローレンツ計量である．どちらの計量についても $SL_2\mathbb{R}$ は等質接触擬リーマン多様体である．特に後者は3次元反 de Sitter 時空 AdS_3 と同一視できる．

$SL_2\mathbb{R}$ をリーマン計量・ローレンツ計量の双方について $\mathbb{S}^3$ と対比させることで $SL_2\mathbb{R}$ の曲面論をどう展開していくべきかを考察したい[*1].

[*1] 本稿の内容の一部は2010年10月8日『広島幾何学研究集会 2010』(広島大学, 2010年10月8日, “3次元等質空間の微分幾何 1,2”) と『擬リーマン幾何の展開 III』(お茶の水女子大学, 2010年12月19日, “3次元反 de Sitter 空間の曲面論”) においても口頭発表した.

1　3次元定曲率空間内の平均曲率一定曲面

$\mathcal{M}^3(c)$ で 3 次元単連結完備な定曲率 c をもつリーマン多様体を表し, 曲率 c の空間形 (space form) とよぶ. $\mathcal{M}^3(c)$ は以下のリーマン多様体と同型である:

- $c > 0$: 球面 $\mathbb{S}^3(c)$,
- $c = 0$: ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$,
- $c < 0$: 双曲空間[*2] $\mathbb{H}^3(-c^2)$.

2 次元多様体 M から $\mathcal{M}^3(c)$ へのはめ込み ($\mathrm{rank}(\mathrm{d}f) = 2$ の写像) のことを, $\mathcal{M}^3(c)$ 内の曲面とよぶ.　曲面 $f : M \to \mathcal{M}^3(c)$ に対し

- $\mathrm{I} = \langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}f \rangle$ を**第一基本形式**とよぶ.
- $\mathrm{II} = -\langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}n \rangle$ を**第二基本形式**とよぶ. n は単位法ベクトル場.
- $H = \mathrm{tr}(\mathrm{I}^{-1}\mathrm{II})/2$ を平均曲率とよぶ.
- 局所複素座標 z を用いて, $Q\,\mathrm{d}z^2 = \langle f_{zz}, n \rangle \mathrm{d}z^2$ とおくと, これは M 上大域的に定義された 2 次微分である. Hopf **微分**という.

これらの定義において, $\mathcal{M}^3(c)$ のリーマン計量を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表した. 曲面の積分可能条件は次の 2 式で与えられる.

(Gauss 方程式)
$$u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}(H^2 + c)e^u - 2|Q|^2 e^{-u} = 0,$$

(Codazzi 方程式)
$$Q_{\bar{z}} = e^u H_z / 2.$$

コダッチ (Codazzi) 方程式から直ちに以下の事実が導ける.

命題 1.1 平均曲率 H が一定 $\Longleftrightarrow$ Q が複素正則, すなわち $Q\mathrm{d}z^2$ は正則 2 次微分.

さらに, 次の事実も導ける. H が一定のとき, Q を $Q \longmapsto Q_\lambda := \lambda^{-1}Q$, (ただし $|\lambda| = 1$) と変形してもガウス・コダッチ方程式はみたされる. 実際,　ガウス方程式

$$u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}(H^2 + c)e^u - 2|Q|^2 e^{-u} = 0$$

において $|Q_\lambda|^2 = |Q|^2$ なので, ガウス方程式が保たれる.

これは積分可能条件を保ったまま, データ (u, H, Q) を (u, H, Q_λ) と変形できることを意味する.

定理 1.1 (Bonnet, 1867) 平均曲率一定曲面 $f : M \to \mathcal{M}^3(c)$ に対し, 第一基本形式と平均曲率を保つ連続変形 $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{S}^1}$ が存在する. $\{f_\lambda\}$ を f の**同伴族**とよぶ.

[*2] 又曲空間／隻曲空間

古典微分幾何においては, このような幾何学的性質を保つ連続変形をもつ曲面が研究対象のひとつであった. 標語的に言えば「変形のパラメータの存在 $\Longleftrightarrow$ 逆散乱法におけるスペクトル径数」であり, 「連続変形可能な曲面」は無限可積分系の構造をもつ.

$Q \neq 0$ の点 (非臍点) のまわりでは「$Q=$ 定数 $\neq 0$」となるよう z をとりかえられる. するとガウス・コダッチの方程式は次のように規格化される ($H \geq 0$ と向きづけしておく):

- $u_{z\bar{z}} + (H^2+c)\sinh u = 0$ ($H^2+c>0$ のとき),
- $u_{z\bar{z}} - e^{-u} = 0$ ($H^2+c=0$ のとき),
- $u_{z\bar{z}} + (H^2+c)\cosh u = 0$ ($H^2+c<0$ のとき).

とくに極小曲面 ($H=0$ の曲面) の場合に述べると次のようになる.

- $\mathbb{S}^3(1)$ の極小曲面の構造方程式は sinh-Gordon 方程式 $u_{z\bar{z}} + \sinh u = 0$.
- $\mathbb{E}^3$ の極小曲面の構造方程式は Liouville 方程式 $u_{z\bar{z}} - e^{-u} = 0$.
- $\mathbb{H}^3(-1)$ の極小曲面の構造方程式は cosh-Gordon 方程式 $u_{z\bar{z}} - \cosh u = 0$.

ガウス・コダッチ方程式から直ちに得られるもう一つの事実を述べる.

定理 1.2 平均曲率が一定値 H である曲面 $f: M \to \mathcal{M}^3(c)$ に対し $\mathcal{M}^3(\tilde{c})$ 内の平均曲率が一定値 $\tilde{H}$ の曲面 $\tilde{f}: D \subset M \to \mathcal{M}^3(\tilde{c})$ で条件 $H^2+c=\tilde{H}^2+\tilde{c}$ をみたすものが存在する. ここで D は M の単連結領域. $\tilde{f}$ を (M,f) の **Lawson 対応面**とよぶ.

(**証明**.) M の単連結な複素座標近傍 (D,z) をとり, ガウス方程式を書くと $u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}(H^2+c)e^u - 2|Q|^2e^{-u} = 0$ であるから D 上で $\tilde{\mathrm{I}} = e^u \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}$, $\tilde{H}$ を $H^2+c=\tilde{H}^2+\tilde{c}$ をみたす実数とし, $\tilde{Q}=Q$ とおくと $(\tilde{\mathrm{I}}, \tilde{H}, \tilde{Q}\mathrm{d}z^2)$ は積分可能条件をみたす. なぜなら $(\tilde{\mathrm{I}}, \tilde{H}, \tilde{Q}\mathrm{d}z^2)$ の積分可能条件は (M,f) の積分可能条件 (ガウス・コダッチ方程式) と同一だから. したがって題意の $\tilde{f}$ が存在する. ■

とくに $\mathbb{E}^3$ 内の平均曲率 $H=1$ の曲面と $\mathbb{S}^3(1)$ の極小曲面が対応する. この事実は 19 世紀の微分幾何学者によって知られていたと思われるが, 現代で広く知られるようになったのは Lawson の極小曲面に関する論文 [65] がきっかけである.

2 非線型変数分離法

2.1 変数分離法

$\mathbb{S}^3$ 内の極小曲面を構成するために「非線型版の変数分離法」を用いる. まず「線型」の場合を復習しておく.

ラプラス方程式 $\triangle u := u_{xx} + u_{yy} = 0$ の解 (調和函数) を構成したい. そのために複素座標 $z = x + yi$ を導入する. つまり $u(x,y)$ を z とその共軛 $\bar{z} = x - yi$ の 2 変数函数と考える. ラプラ

ス方程式は $u_{z\bar{z}}=0$ と書き直せるので, u は変数分離される. すなわち $2u$ は

$$2u(z,\bar{z})=f(z)+g(\bar{z})$$

と z だけの函数 $f(z)$ と $\bar{z}$ だけの函数 $g(\bar{z})$ の和として表せる. 言い換えると, $f_{\bar{z}}=0$ をみたす函数 f と $g_z=0$ をみたす函数 g の和である. u は実数値であるから $g(\bar{z})=\bar{f}(\bar{z})$ でないといけない. これは u が f の実部 (real part) であることを意味する. 条件 $f_{\bar{z}}=0$ は f が複素正則函数であることにほかならない. 以上を整理する.

定理 2.1 $\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された調和函数 $u(x,y)$ は D 上の複素正則函数 $f(z)$ を用いて, $u=(f(z)+\bar{f}(\bar{z}))/2$ と表せる.

$\mathbb{E}^3$ 内の極小曲面 $f:M\to\mathbb{E}^3$ の位置ベクトル場 f はベクトル値の調和函数であることから, 上記のようにベクトル値の複素正則函数の実部として表すことができる. 平均曲率が 0 でない一定の場合は, 単純な変数分離法は構成できないが次節で説明するように非線型版の変数分離法が得られている.

2.2 非線型変数分離法 (DPW)

ここで述べる方法の源泉は Krichever[62] に遡れる. また 1980 年代の日本で研究されていた「リーマン・ヒルベルト問題を用いた解法」(上野喜三雄・高崎金久・中村佳正) とも密接に関わる.

$\mathbb{S}^3$ の極小曲面と非線型変数分離法を結びつける出発点は次にあげる「平均曲率の一定性の特徴づけ」である.

まず $\mathbb{S}^3:=\mathbb{S}^3(1)$ を特殊ユニタリー群 SU_2 に定曲率 1 の両側不変リーマン計量 (Killing metric) を与えたものとして取り扱う. $\mathbb{S}^3$ 内の曲面はリーマン面 M から $\mathbb{S}^3$ への共形はめ込み (conformal immersion) として取り扱う. M 上大域的に定義された単位法ベクトル場を n とする. $\mathbb{S}^3=\mathrm{SU}_2$ の群構造を用いて $g:=f^{-1}n$ と定める. g はリー環 $\mathbb{E}^3=\mathfrak{su}_2$ 内の原点中心の単位球面 $\mathbb{S}^2$ への写像である. これを f の**法ガウス写像** (normal Gauss map) とよぶ.

定理 2.2 (Ruh-Vilms の性質) 曲面 $f:M\to\mathbb{S}^3(1)=\mathrm{SU}_2$ の平均曲率が一定であるための必要十分条件は法ガウス写像 $g:=f^{-1}n$ が $\mathbb{S}^2$ 値の調和写像 (harmonic map) であること.

ここで**調和写像**とは 2 つのリーマン多様体の間の写像でエネルギー汎函数の停留点となるものをいう.

註 2.1 (調和写像) リーマン多様体の間の写像 $f:(M,g)\to(N,h)$ に対し**エネルギー汎函数**は

$$E(f)=\int\frac{1}{2}|\mathrm{d}f|^2\,dv_g$$

で定められる. この汎函数に対するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\tau(f)=\mathrm{tr}(\nabla\mathrm{d}f)=0$$

で与えられる．f が調和とは $\tau(f)=0$ をみたすことである．$\tau(f)$ を f の tension 場とよぶ．

定義域が 2 次元のときは, 写像の調和性は「定義域の共形変換」で不変なのでリーマン面からの写像に対しても意味をもつ．とくに共形的調和写像は極小はめ込みである．リーマン面からリーマン対称空間への調和写像は非線型シグマ模型の一種であり理論物理学でも研究対象とされてきた．とくにコンパクト・リー群が値域のときは**主カイラル模型** (principal chiral model) とよばれるゲージ理論のトイモデルである．Zakrzewski の本 [83] を参照．

$\mathbb{S}^2=\mathrm{SU}_2/\mathrm{U}_1$ はコンパクト・リーマン対称空間の典型例であることを注意しておく．ここで紹介する非線型変数分離法 (DPW) はリーマン面から (コンパクト) リーマン対称空間への調和写像に対して適用できる．

註 2.2 $\mathbb{S}^3$ 内の曲面でガウス曲率 K が 1 より小さいものを考える．第二基本形式はローレンツ計量を定める．そこで g が第二基本形式に関し調和であるための条件を求めるとそれは K が定数であることとわかる．この事実に基づき $\mathbb{S}^3$ 内のガウス曲率 $K<1$ が一定である曲面を非線型変数分離法で構成することができる．詳細は [9] を参照．

2.3 調和写像方程式の書き換え

$\mathbb{D}$ を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域とする．写像 $\psi:\mathbb{D}\to\mathrm{SU}_2/\mathrm{U}_1$ に対し, そのリフト $\Psi:\mathbb{D}\to\mathrm{SU}_2$ をとる．Ψ は ψ の frame(または行列値波動函数) とよばれる．

$\alpha=\Psi^{-1}\mathrm{d}\Psi$ とおく．α はリー環 $\mathfrak{su}_2$ に値をもつ 1 次微分形式で α は恒等式

$$\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]=0$$

をみたす (Maurer-Cartan 方程式)．これは与えられた α に対し, 偏微分方程式 $d\Psi=\Psi\,\alpha$ の解 $\Psi:\mathbb{D}\to\mathrm{SU}_2$ が存在するための条件 (積分可能条件) である．

もうひとつの大事な視点は $A:=\mathrm{d}+\alpha$ が主ファイバー束 $\mathbb{D}\times\mathrm{SU}_2$ 上の**ゲージポテンシャル** (接続) を与えることである．A の field strength(曲率) F_A は

$$F_A=\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]$$

であるから, Maurer-Cartan 方程式は $A=\mathrm{d}+\alpha$ が平坦 (flat, 零曲率) であることを意味する．

ここで α を $\alpha=\alpha_0+\alpha_1$ と分解する．α_0 は対角行列部分, α_1 は反対角行列部分である．この分解は $\mathfrak{su}_2$ の線型空間としての分解 $\mathfrak{su}_2=\mathfrak{u}_1\oplus\mathfrak{p}$ に沿うものである ($\mathfrak{p}$ は $\mathbb{S}^2$ の原点における接平面)．さらに共形構造を用いて $\alpha_1=\alpha_1'+\alpha_1''$ と分解する．α_1' は $\mathrm{d}z$ 成分, α_1'' は $\mathrm{d}\bar{z}$ 成分である．もとの写像 ψ の調和性は以下のように書き換えられる．

命題 2.1 ψ が調和写像 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{d}(*\alpha_1)+[\alpha\wedge *\alpha_1]=0$. ($*$ は Hodge star 作用素).

ここまでを整理しよう．$\mathbb{D}$ で定義され，$\mathbb{S}^2 = \mathrm{SU}_2/\mathrm{U}_1$ に値をもつ調和写像を構成するには，

$$\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0, \quad \mathrm{d}(*\alpha_1) + [\alpha \wedge *\alpha_1] = 0$$

をみたす $\mathfrak{su}(2)$ 値の 1 次微分形式 α をみつければよい． 言い換えると $\mathbb{D} \times \mathrm{SU}_2$ 上の平坦なゲージポテンシャル $A = \mathrm{d} + \alpha$ で $\mathrm{d}(*\alpha_1) + [\alpha \wedge *\alpha_1] = 0$ をみたすもの (**容認接続**/admissible connection) を探せということである．

註 2.3 以上の考察は $\mathrm{SU}_2/\mathrm{U}_1$ を一般の擬リーマン対称空間 G/K として成立する．

2.4 逆散乱法

調和写像 (シグマ模型) を構成するために「容認接続という特殊な平坦接続を求めよ」ということが導かれたが，容認接続の方程式は非線型偏微分方程式であり難しさが残ったままである．ところが Pohlmeyer[73] が以下に述べる注目すべき事実を得た．

写像 $\psi : \mathbb{D} \to \mathrm{SU}_2/\mathrm{U}_1$ から作った 1 次微分形式 α に補助的な径数 $\lambda \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ を

$$\alpha_\lambda := \alpha_0 + \lambda^{-1}\alpha_1' + \lambda\alpha_1'',\ \lambda \in \mathbb{S}^1$$

という方法で挿入し**スペクトル径数**とよぶ．このとき次が成立する．

定理 2.3 (零曲率表示; Pohlmeyer) ψ が調和写像であるための必要十分条件は $A_\lambda := \mathrm{d} + \alpha_\lambda$ がすべての λ について平坦 ($F_{A_\lambda} = 0$) であること， すなわち

$$\mathrm{d}\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0, \quad {}^\forall\lambda \in \mathbb{S}^1.$$

この事実により，調和写像の構成問題が，特殊な**平坦接続の 1 径数族**(loop) を求めることに書き換えられた．

ところで $F_{A_\lambda} = 0$ ということから，$\Psi_\lambda^{-1}\mathrm{d}\Psi_\lambda = \alpha_\lambda$ の解 Ψ_λ が存在することに注意されたい．Ψ_λ は $\mathbb{D}$ で定義され SU_2 に値をもつ写像の 1 径数族であるから，$\Psi_\lambda : \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1 \to \mathrm{SU}_2$ という写像が定まったことになるのだが，Ψ_λ は $\mathbb{D}$ から

$$\Lambda\mathrm{SU}_{2\,\sigma} = \{\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathrm{SU}_2 \mid \sigma(\gamma(\lambda)) = \gamma(-\lambda)\}$$

への写像と見ることができる． ここで σ はリーマン対称空間 $\mathbb{S}^2 = \mathrm{SU}_2/\mathrm{U}_1$ を定める対合 (involution) であり，具体的には $\sigma = \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(1, -1))$ で与えられる．$\Lambda\mathrm{SU}_{2\sigma}$ は SU_2 内の loop がつくる (無限次元リー) 群であり，SU_2 の twisted loop group とよばれる．Ψ_λ は ψ の extended frame とよばれる．

2.5 Lax 方程式

前節で登場した extended frame Ψ_λ とは一体どういうものなのだろうか. Ψ_λ は偏微分方程式 $\mathrm{d}\Psi_\lambda = \Psi_\lambda \alpha_\lambda$ の解であった. ここで $\alpha_\lambda = U_\lambda \mathrm{d}z + V_\lambda \mathrm{d}\bar{z}$ とおくと Ψ_λ は

$$\frac{\partial}{\partial z}\Psi_\lambda = \Psi_\lambda U_\lambda,\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Psi_\lambda = \Psi_\lambda V_\lambda,$$

と書き直せる. これは調和写像 $\psi_\lambda := \Psi_{\lambda=1}\cdot \mathrm{U}_1$ に対する **Lax 表示**とよばれるものである. ψ_λ をガウス写像にもつ $\mathbb{E}^3$ 内の平均曲率が一定値 $H \neq 0$ の曲面の Hopf 微分を $Q\,\mathrm{d}z^2$ とすると

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} u_z/4 & -\lambda^{-1}He^{u/2}/2 \\ \lambda^{-1}Qe^{-u/2} & -u_z/4 \end{pmatrix},\quad V_\lambda = \begin{pmatrix} -u_{\bar{z}}/4 & -\lambda\bar{Q}e^{-u/2} \\ \lambda HQe^{u/2}/2 & u_{\bar{z}}/4 \end{pmatrix}$$

にゲージ同値であることが確かめられる.

extended frame を構成する**非線型変数分離法**(DPW の方法) とは以下の手続きをいう (Dorfmeister-Pedit-Wu[27]).

(1) SU_2 の twisted loop algebra $\Lambda\mathfrak{su}_{2\sigma}$, すなわち $\Lambda\mathrm{SU}_{2\sigma}$ のリー環[*3]に値をもつ $\mathbb{D}$ 上の 1 次微分形式

$$\xi = \sum_{j=-1}^{\infty} \xi_j(z)\lambda^j \mathrm{d}z,$$

で条件: 「各 $\xi_j(z)$ は z について複素正則で, ξ_{2j} は対角行列, ξ_{2j+1} は反対角行列」をみたすものをとる. ξ を**ポテンシャル**とよぶ.

(2) 常微分方程式 $\mathrm{d}C = C\xi$ を指定された初期条件の下で解く.

(3) twisted loop group の岩澤分解 (Riemann-Hilbert 分解) を用いて $C = \Psi_\lambda V_+$ と分解すれば, Ψ_λ は extended frame である.

定理 2.4 (岩澤分解 (DPW)) twisted loop group $\Lambda\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ は

$$\Lambda\mathrm{SL}_2\mathbb{C}_\sigma = \Lambda\mathrm{SU}_{2,\sigma}\cdot\Lambda_*^+\mathrm{SL}_2\mathbb{C}_\sigma$$

と分解できる. ただし

$$\Lambda_*^+\mathrm{SL}_2\mathbb{C}_\sigma = \{\gamma(\lambda) = \mathrm{I} + \sum_{j>0}\gamma_j\lambda^j \in \Lambda\mathrm{SL}_2\mathbb{C}_\sigma\}.$$

3 次元単位球面 $\mathbb{S}^3$ はリーマン対称空間として $\mathrm{SU}_2\times\mathrm{SU}_2/\mathrm{SU}_2$ と表示され, 射影は $(g,h)\longmapsto gh^{-1}$ で与えられる. このことに注意すると, extended frame から平均曲率一定曲面, とくに極小曲面が次の式で得られることがわかる.

$$f := \Psi_{\lambda_1}\Psi_{\lambda_2}^{-1}.$$

$\mathbb{H}^3$ の極小曲面については, 別種の DPW の方法が必要になる. [24] 参照.

---

*3 $A_1^{(1)}$ 型アフィン・リー環は $\Lambda\mathfrak{su}_{2\sigma}$ を 2 度中心拡大したものであることに注意.

3 3 次元幾何学

3.1 Thurston 幾何

W. Thurston [78] によれば 3 次元幾何学には以下の 8 つのモデル空間がある:

- 等長変換群の次元が 6 のとき: 空間形 (space forms) $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{H}^3$. これらはリーマン対称空間.
- 等長変換群の次元が 4 のとき: 可約リーマン対称空間 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$,
- 等長変換群の次元が 4 のとき: 佐々木空間形: Nil_3 と $\widetilde{\mathrm{SL}}_2\mathbb{R}$,
- 等長変換群の次元が 3 のとき: Sol_3.

これらの 8 つのリーマン多様体は Sol_3 以外すべて標準簡約等質空間 (naturally reductive homogeneous space) である. 3 次元単連結な標準簡約等質空間は Tricerri と Vanhecke[79] により分類されている. これらの空間のリーマン計量は Bianchi により発見され, のちに Cartan が等質性を証明した. Sol_3 と $\mathbb{H}^3$ 以外の 6 つの空間は等質リーマン空間の 2 径数族に属することが知られている (Vranceanu/Tzitzeica の弟子). その族は Bianchi-Cartan-Vranceanu family とよばれている ([5] 参照).

3.2 接触構造

3 次元多様体 M 上の 1 次微分形式 η が $\mathrm{d}\eta \wedge \eta \neq 0$ をみたすとき**接触形式**とよぶ. 接触形式を備えた 3 次元多様体 (M^3, η) を (強い意味での)3 次元**接触多様体**とよぶ[*4]. 接触多様体 (M^3, η) 上で

$$\eta(\xi) = 1, \quad \mathrm{d}\eta(\xi, \cdot) = 0$$

をみたすベクトル場 ξ が唯一定まる. これを **Reeb ベクトル場**とよぶ. さらに以下をみたす endomorphism 場 ϕ とリーマン計量 g が存在する.

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$
$$g(X, \phi Y) = \mathrm{d}\eta(X, Y).$$

3 次元接触多様体 M にこれらのテンソル場 (ϕ, ξ, g) を併せたもの (M, η, ξ, ϕ, g) を 3 **次元接触リーマン多様体**とよぶ. より一般に 3 次元多様体 M 上のテンソル場の組 (ϕ, ξ, η, g) が条件

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \ \eta(\xi) = 1,$$
$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

[*4] 接触リーマン幾何では大域的に定義された接触形式を接触構造とよび, $\eta = 0$ で定まる超平面場を接触分布とよぶ. 接触幾何・接触トポロジーでは積分不可能な超平面場を接触構造とよび, 大域的な接触形式の存在は仮定しない. 本稿で扱う接触多様体は大域的な接触形式をもつものばかりなのでこの定義を採用した.

をみたすとき (M,ϕ,ξ,η,g) を 3 次元**概接触リーマン多様体** (almost contact Riemannian 3-manifold) とよぶ. ∇ で g の Levi-Civita 接続を表すことにする.

任意の 3 次元リーマン多様体 (M^3,g) に対し (M,ϕ,ξ,η,g) が概接触リーマン多様体となる (ϕ,ξ,η) が存在することを注意しておく.

定義 3.1 3 次元概接触リーマン多様体 (M,ϕ,ξ,η,g) は次のようによばれる:

- $g(X,\phi Y)=\mathrm{d}\eta(X,Y)$ をみたすとき接触リーマン多様体.
- $\nabla\xi$ が ϕ と可換なとき**正規**概接触リーマン多様体 (normal almost contact Riemannian 3-manifold*5).
- 正規接触リーマン多様体のとき**佐々木多様体** (Sasakian manifold) *6.

命題 3.1 3 次元概接触リーマン多様体 (M,ϕ,ξ,η,g) に対し

- 正規 $\Longleftrightarrow$ $(\nabla_X\phi)Y=\alpha(g(X,Y)\xi-\eta(Y)X)+\beta(g(\phi X,Y)\xi-\eta(Y)\phi X)$. ($\alpha$, β は函数).
- 佐々木多様体 $\Longleftrightarrow$ 正規で $\alpha=1$, $\beta=0$ $\Longleftrightarrow$ $\nabla\xi=-\phi$.
- cosymplectic 多様体 $\Longleftrightarrow$ $\nabla\phi=0$.
- **剱持多様体** (Kenmotsu manifold)$\Longleftrightarrow$ 正規で $\alpha=0$, $\beta=1$ ([55]).

Thurston 幾何のモデル空間の場合, それぞれのリーマン計量に標準的に同伴する概接触リーマン構造は以下の性質をもっている.

- $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$. $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ は cosymplectic 多様体.
- $\mathbb{S}^3$, Nil_3. $\widetilde{\mathrm{SL}}_2\mathbb{R}$ は佐々木多様体.
- $\mathbb{H}^3$ は剱持多様体.
- Sol_3 は佐々木でない接触リーマン多様体で, CR 対称空間.
- Sol_3 以外すべて正規.

完備連結な佐々木多様体で断面曲率 $\mathcal{H}(X):=K(X\wedge\phi X)$ (ただし $X\perp\xi$) が定数であるとき, その佐々木多様体は**佐々木空間形** (Sasakian space form) とよばれる. 3 次元の単連結な佐々木空間形は以下で与えられる (具体的な表示は [5] を参照).

- $\mathcal{H}>1$ のとき, SU_2 に特殊な左不変接触リーマン構造を与えたもの (Berger 球).
- $\mathcal{H}=1$ のとき, $\mathbb{S}^3$.
- $-3<\mathcal{H}<1$ のとき, SU_2 に特殊な左不変接触リーマン構造を与えたもの.
- $\mathcal{H}=-3$ のとき, Heisenberg 群 Nil_3.
- $\mathcal{H}<-3$ のとき, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2\mathbb{R}$ に特殊な左不変接触リーマン構造を与えたもの.

---

*5 本来の定義は Blair の本 [6] を参照. ここでは Olszak の定理 [70] を定義の代用とした.

*6 佐々木重夫. 錐計量を使った定義については [8] を参照.

したがって Thurston 幾何におけるモデル空間 $\mathbb{S}^3$, Nil_3, $\widetilde{\mathrm{SL}_2\mathbb{R}}$ は共通した性質「佐々木空間形」をもつことがわかった (Nil_3 については [7] も参照されたい).

註 3.1 (リッチ曲率の観点から) 3 次元リーマン多様体が定曲率であるための必要十分条件は主リッチ曲率 (リッチ・テンソル場の固有値) がすべて一致することである. この観点に基づき, 空間形の一般化として**リーマン局所擬対称空間** (locally pseudo-symmetric space) という概念が提案された (Deszcz[22]). 3 次元リーマン多様体の主リッチ曲率の 2 つが一致するとき, そのリーマン多様体をリーマン局所擬対称空間とよぶ. この場合, 一致する主リッチ曲率は定数になるとは限らない. Thurston 幾何のモデル空間はすべてリーマン局所擬対称空間である[*7].

3.3 $\mathbb{S}^3$ の佐々木構造

$\mathbf{H}$ で四元数体を表す:

$$\mathbf{H} = \{X = X_0 + X_1\boldsymbol{i} + X_2\boldsymbol{j} + X_3\boldsymbol{k} \mid X_0, X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{S}^3$ は $\mathbf{H}$ 内の単位ベクトル全体である.

$$\mathbb{S}^3 = \{X \in \mathbf{H} \mid |X| = 1\} \cong \mathrm{SU}_2.$$

$\boldsymbol{i}$ を左移動して得られる左不変ベクトル場を ξ とする. ξ の双対 1 次微分形式を η とすると, η は左不変接触形式で $\mathbb{S}^3$ の左不変佐々木構造を定める. とくに佐々木空間形.

ξ は完備ベクトル場であり, ξ の定める 1 次元リー群 $\mathbb{S}^1$ の作用による $\mathbb{S}^3$ の商空間を $\mathbb{S}^3/\xi$ と表すとこの商空間は 2 次元球面 $\mathbb{S}^2$ である. 射影 $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ は $\mathbb{S}^2$ 上の円周束を定めている (Boothby-Wang 束). これは Hopf 束に他ならない.

Hopf 束をもう少し詳しく調べよう. Ad 作用

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}_2 \times \mathfrak{su}_2 \to \mathfrak{su}_2;\ \mathrm{Ad}(a)X = aXa^{-1}$$

による $\boldsymbol{i}$ の軌道は $\mathbb{S}^2 = \{X \in \mathfrak{su}_2 \mid |X| = 1\}$ であり $\mathbb{S}^3/\xi = \mathrm{Ad}(\mathrm{SU}_2)\boldsymbol{i}$ であることがわかる. Ad 軌道をとることが Hopf 束を定めることと同義である.

4 $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ の幾何

4.1 岩澤分解

Thurston 幾何における $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ について詳しく調べる. まず $G = \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ の岩澤分解 $G = NAK$ を復習する.

[*7] 3 次元局所擬対称な概接触リーマン多様体については [12, 13, 14, 17] を参照.

- nilpotent part

$$N = \mathrm{Nil}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$

- abelian part

$$A = \mathrm{SO}_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$

- compact part

$$K = \mathrm{SO}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid 0 \leq \theta < 2\pi \right\}.$$

したがって $g \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ は

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と一意的に分解できることから $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ は $\mathrm{SL}_2 = \mathbb{R}(x) \times \mathbb{R}^+(y) \times \mathbb{S}^1(\theta)$ にリーマン計量

$$\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{4y^2} + \left(\mathrm{d}\theta + \frac{\mathrm{d}x}{y} \right)^2$$

を与えたものと同一視できる．このリーマン計量は左不変だが右不変ではない．等質リーマン空間として $\mathrm{SL}_2\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2/\mathrm{SO}_2$ と表示される．

4.2 標語：接触構造 ↔Hopf 束 ↔ 岩澤分解

$\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ の接触形式 η を

$$-\eta := \mathrm{d}\theta + \frac{\mathrm{d}x}{y}$$

で与えると $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ は $\mathcal{H} = -7$ の佐々木空間形である．ξ の定める 1 次元リー群の作用による商空間 $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}/\xi$ は双曲平面 $\mathbb{H}^2 = \mathrm{SL}_2\mathbb{R}/\mathrm{SO}_2$ である．これは Hopf 束 $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ の類似である．

$\mathbb{S}^3 = \mathrm{SU}_2$ の場合, Hopf 束 (Boothby-Wang 束) は $\mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SU}_2/\mathrm{U}_1$ であり, その類似として $\mathrm{SL}_2\mathbb{R} \to \mathrm{SL}_2\mathbb{R}/\mathrm{SO}_2$ がある．$\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ においては, ほかにも $\mathrm{SL}_2\mathbb{R} \to \mathrm{SL}_2\mathbb{R}/\mathrm{SO}_{1,1}$ や $\mathrm{SL}_2\mathbb{R} \to \mathrm{SL}_2\mathbb{R}/\mathrm{Nil}_1$ といった射影がある．これらも Hopf 束の類似と思えるだろうか．しかしながらこれらの射影とリーマン計量はあまり相性がよくない．

4.3 Best metric ?

$\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ 上のリーマン計量でもっと対称性が高いものは等長変換群の次元が 4 のとき, すなわち標準簡約等質空間を与えるリーマン計量 (左 $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ 不変かつ右 SO_2 不変) である．一方, $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ の Killing 計量は両側不変のローレンツ計量であり, とくに負定曲率である．対称性の高さから言えば Killing 計量が最もよい計量と言える．以下, 断面曲率が -1 となるように Killing 計量を調整して

おく．すると $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ は 3 次元反 de Sitter 時空 AdS_3 と同一視できる．またこの Killing 計量は岩澤分解をつかうと

$$\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{4y^2}-\left(\mathrm{d}\theta+\frac{\mathrm{d}x}{y}\right)^2.$$

と表せる．AdS_3 はローレンツ対称空間として $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}\times\mathrm{SL}_2\mathbb{R}/\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ と表示される．さらにローレンツ計量版の佐々木空間形である． これらのことから AdS_3 は $\mathbb{S}^3$ の類似と思えそうである．そこで $\mathbb{S}^3$ と比較しながら AdS_3 の曲面について考察していく．Killing 計量を用いた場合, リー環 $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ はミンコフスキー時空 $\mathbb{E}^{1,2}$ と同一視されることを注意しておこう．

4.4 Hopf fibrations, revisited

Hopf 束 $\pi:\mathrm{SU}_2\to\mathbb{S}^2$ をリーマン沈め込みにするため, 底空間の曲率を 4 に調整する．$\pi:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^2(4)$ による $\mathbb{S}^2(4)$ 内の弧長径数表示された曲線 γ の逆像 $\Sigma_\gamma:=\pi^{-1}\{\gamma\}$ は $\mathbb{S}^3$ 内の平坦曲面で平均曲率は $H=\kappa/2$(κ は γ の曲率) で与えられる．Σ_γ を γ 上の **Hopf 柱面**とよぶ．

$\pi:\mathrm{AdS}_3\to\mathbb{H}^2(-4)$ に対しては, 曲線 $\gamma\subset\mathbb{H}^2(-4)$ の逆像 $\pi^{-1}\{\gamma\}$ は時間的平坦曲面*8で $H=\kappa/2$ となる．H が一定となる Hopf 柱面の分類は $\mathbb{H}^2(-4)$ 内のリーマン円 (曲率一定の曲線, ケーラー磁場の軌道) に帰着する*9.

命題 4.1 $\gamma\subset\mathbb{H}^2(-4)$ 上の Hopf 柱面で平均曲率が一定であるのは以下の場合である．

- $\kappa=0$ のとき測地線上の Hopf 柱面． これは Magid[68] により minimal complex circle とよばれていた ($\mathbb{S}^3$ の Clifford torus のまねと思える).
- $0<\kappa^2<4$ のとき開円上の Hopf 柱面または $y=\pm\sqrt{1-4\kappa^2}/(2\kappa)x$ 上の Hopf 柱面.
- $\kappa^2=4$ のとき, 境円 (horocycle) 上の Hopf 柱面または $y=\mathrm{const}$ 上の Hopf 柱面.
- $\kappa^2>4$ のとき, 閉円上の Hopf 輪環面.

リーマン計量の場合の対応する結果は國分雅敏による [59]．國分はこの場合の Hopf 柱面を回転面とよんでいた．SO_2 不変な平均曲率一定曲面については Gorodski[32] も参照されたい.

$\mathrm{SL}_2\mathbb{R}/\mathrm{SO}_{1,1}=\mathbb{S}^{1,1}(4)$ は 2 次元の **de Sitter 時空**である．この場合, $\mathbb{S}^{1,1}(4)$ がローレンツ多様体なので曲線の causal character によって Hopf 柱面の符号が影響される.

曲線 $\gamma\subset\mathbb{S}^{1,1}(4)$ が空間的曲線であれば, Hopf 柱面の計量は時間的平坦曲面である．γ が時間的であれば Hopf 柱面の計量は $(-,-)$ の符号をもつ．$\mathbb{H}^2(-4)$ のときと同様に H が一定の場合の分類が得られる．詳細は [35] を参照.

リーマン計量の場合に, このケースの Hopf 柱面を國分はコノイド (conoid) とよんでいる．コノイドは一般に平坦ではないことが Killing 計量の場合との大きな違いである． 國分は極小コノイ

*8 3 次元ローレンツ時空内の曲面で誘導計量がローレンツ計量であるものを**時間的曲面** (timelike surface), リーマン計量であるとき**空間的曲面** (spacelike surface) とよぶ．時間的曲面については [51] を参照.

*9 概接触リーマン多様体で fundamental 2-form $g(\cdot,\phi)$ が閉形式であるものではケーラー磁場の類似として接触磁場を考えることができる [23, 33]．最後の節も参照.

ドを分類している.

問題 4.1 $\mathbb{S}^{1,1}(4)$ 内の光的曲線 γ の逆像 $\pi^{-1}\{\gamma\} \subset \mathrm{AdS}_3$ はどんな曲面か.

最後の Hopf 束は $\mathrm{SL}_2/(\mathrm{Nil}_1\mathbb{Z}_2) = \Lambda_+$ で与えられるが, Λ_+ は $\mathbb{E}^{1,2} = \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ 内の未来的光錐 (future lightcone) である.

命題 4.2 ([35]) 曲線 $\gamma \subset \Lambda_+$ の逆像は時間的平坦曲面で平均曲率は ± 1. この Hopf 柱面の主曲率は各点で一致するが, 全臍的ではない.

この Hopf 柱面は $\mathbb{S}^3(1)$ のときに類似物をもたない. 時間的な曲面では主曲率 (shape operator の特性根) は実数値と限らない. また主曲率が重根であっても曲面が臍的であるとは言えないことに注意が必要である*10. この Hopf 柱面は平坦かつ平均曲率の絶対値が 1 であることから, むしろ $\mathbb{H}^3(-1)$ の**境球** (horosphere) のローレンツ版と思える. Dajczer と野水 [20] により B-scroll とよばれていた時間的曲面と一致することが確かめられる.

定理 4.1 (Dajczer-野水) $f : \mathbb{E}^{1,1} \to \mathrm{AdS}_3$ が平均曲率が 0 でなく一定な等長はめこみ (したがって平坦) ならば f は B-scroll に合同.

この曲面をリーマン計量のときに考えると, いろいろな意味で例外的なものである. たとえば Espinar と Rosenberg[28] による Bianchi-Cartan-Vranceanu family 内の完備平均曲率一定でファイバー方向と定角をなす曲面の分類で最初に公開された preprint (`arXiv:0903.2439v1`) ではこの曲面が漏れていた. Steven Verpoort[81] は独立にこの曲面を発見し *parabolic helicoid* とよんでいた. また内藤博夫により導入された軌道型グラスマン幾何を $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ で展開した場合に例外的なものとして登場する [50]. 3 次元等質リーマン空間内の曲面に対する軌道型グラスマン幾何については [39, 50, 63] を参照.

Hopf 束を Ad-軌道の観点から再検討しておこう. まず 2×2 の実行列全体に次のような基底 $\{\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ をとる:

$$\mathfrak{gl}_2\mathbb{R} = \{X = X_0\mathbf{1} + X_1\boldsymbol{i} + X_2\boldsymbol{j}' + X_3\boldsymbol{k}'\}, \quad X = \begin{pmatrix} X_0 + X_3 & X_1 + X_2 \\ -X_1 + X_2 & X_0 - X_3 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{gl}_2\mathbb{R}$ は**亜四元数代数** (split-quaternion, para-quaternion) とよばれる代数系 (Clifford 代数) $\mathbf{H}'$ と同型である. スカラー積は

$$\langle X, X \rangle = -\det X$$

で与えられる. このスカラー積に関し $\mathfrak{gl}_2\mathbb{R}$ は符号が $(-,-,+,+)$ の擬ユークリッド空間である. AdS_3 は $\det X = 1$ で定義される超曲面であり $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ と一致する. また $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ は $X_0 = 0$ で定まる $\mathfrak{gl}_2\mathbb{R}$ の超平面であるからミンコフスキー時空 $\mathbb{E}^{1,2}$ と同一視される.

*10 3 次元ローレンツ空間形内の時間的曲面が全臍的であるための必要十分条件は主曲率が実であり各点で一致し, 対応する固有空間が 2 次元であること.

例 4.1 (真空解) $\{X, Y\}$ を $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ の空間的正規直交基底として $f(x,y) = e^{xX}e^{yY}$ と定めると, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{AdS}_3$ は平坦で $H = 0$ の空間的曲面になる.

Ad-orbits の分類を述べよう. $\mathcal{O}_c := \{X \in \mathfrak{sl}_2\mathbb{R} \mid \det X = c\}$ とおく.

命題 4.3 $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ の Ad-orbits は次のどれか.

- $\mathcal{O}_c = \mathbb{S}^{1,1}(-c) = \mathrm{SL}_2\mathbb{R}/\mathrm{SO}_{1,1}$ for $c < 0$,
- $\mathcal{O}_c^{\pm} := \{X \in \mathcal{O}_c \mid \pm X_1 > 0\} = \mathbb{H}^2(-c)$ for $c > 0$,
- $\mathcal{O}_0 = \Lambda_+ \cup \{0\} \cup \Lambda_-$.

$\mathbb{S}^3$ における「Hopf 束と Ad 軌道の関係」は $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ においても成立しているのだが, $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ は $\mathbb{S}^3$ の場合にはない曲面をもつことが大事な点である.

5 AdS_3 の平坦曲面

5.1 $\mathbb{S}^3$ の平坦曲面

$\mathbb{S}^3$ の平坦曲面の構成法は 19 世紀から 20 世紀初頭にかけて Bianchi によって研究が創始されたようである. その後, 佐々木重夫, Spivak, Cecil による現代的記述が与えられた. 佐々木重夫の論文 [74] では高木亮一による問題 (質問) が述べられている.

$\mathbb{S}^3$ 内の完備平坦曲面は Clifford 輪環面のみか.

答えは否である. $\mathbb{S}^2(4)$ 内の閉曲線上の Hopf 柱面は平坦であり, 位相的には輪環面である (Hopf torus とよぶ*11). 佐々木構成法は局所理論としては Bianchi 構成法と等価であり, Clifford 輪環面以外にも多くの完備平坦曲面が構成できることがわかっていた.

$\mathbb{S}^3$ 内のコンパクトな平坦曲面の種数は 1 に限ることに注意しよう.

Yau(1975) が提出した問題のひとつに "$\mathbb{S}^3$ 内の平坦輪環面を分類せよ" があった. この問題が提起された当時知られていた平坦輪環面は Hopf 輪環面のみであった. この問題は北川義久 [57] により解答が与えられた. Hopf 輪環面以外にも多くの平坦輪環面が存在する. 北川は $\mathbb{S}^3$ 内のすべての平坦輪環面を得る構成法も与えている.

$\mathbb{S}^3$ 内の平坦曲面も**可積分系**の構造をもつ. 実際, 漸近チェビシェフ網で径数表示すると

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}x^2 + 2\cos u\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2, \quad \mathrm{I\!I} = 2\sin u\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

となりガウス・コダッチ方程式は線型波動方程式 $u_{xy} = 0$ である. 各径数曲線は漸近線で捩率が $+1$ と -1 であることもわかる.

$\mathbb{S}^3 = \mathrm{SU}_2$ というモデルの下で北川構成法 [57] は以下のように述べられる.

---

*11 Lawson による指摘, Pinkall[72] 参照.

- (Bianchi-佐々木-Spivak の言い換え) $(0,0)$ を含む単連結領域で定義された平坦曲面 f : $\mathbb{D}\to\mathbb{S}^3$ は
$$f(x,y)=f(x,0)f(0,0)^{-1}f(0,y)$$
と表せる.
- $\mathbb{S}^2=\mathrm{Ad}(\mathrm{SU}_2)\boldsymbol{i}$ と表示し, $\mathbb{S}^2$ の単位接ベクトル束を
$$\mathrm{U}\mathbb{S}^2=\{(X,Y)\in\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2\mid\langle X,Y\rangle=0\}\subset\mathfrak{su}_2\times\mathfrak{su}_2\text{と表示する.}$$
- $\pi:\mathbb{S}^3=\mathrm{SU}_2\to\mathrm{U}\mathbb{S}^2$ を
$$\pi(g)=(\mathrm{Ad}(g)\boldsymbol{i},\mathrm{Ad}(g)\boldsymbol{j})$$
で定める.
- $\mathbb{S}^2$ 内の曲線 c_1, c_2 で初期条件 $c_i(0)=\boldsymbol{i}$, $c_i'(0)=\boldsymbol{j}$, $\kappa_1\neq\kappa_2$ をみたすものを取る.
- $\pi(a_i)=(c_i,c_i'/|c_i'|)$ で $\mathbb{S}^3$ へのリフト a_i を定める.
-
$$f(x,y):=a_1(x)a_2(y)^{-1}\text{は }\mathbb{S}^3\text{の flat surface.}$$

  c_1, c_2 を periodic admissible pair とよばれる組にとれば f は平坦輪環面である.

$\mathbb{S}^3$ の平坦輪環面については北川の総説 [58] を参照.

北川構成法をまねて AdS_3 内の時間的平坦曲面の構成法を考えるのは想像に難くない. 実際 Leon-Guzman, Mira, Pastor [66] がそのような表現公式を与えている.

さて, AdS_3 は $\mathbb{S}^3$ の類似と言い切ってしまってよいだろうか. B-scroll はむしろ $\mathbb{H}^3$ 内の境球のローレンツ版のように思える点もあった. AdS_3 は $\mathbb{H}^3$ にも似た性質 (幾何) をもっているのかもしれない. ひとつの例として次の結果を紹介する.

定理 5.1 (時間的平坦曲面の別の表現公式 (I-Ionel-Lee)) $F=(F_1,F_2):D\subset\mathbb{E}^{1,1}\to\mathrm{SL}_2\mathbb{R}\times\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ を
$$F_1^{-1}\mathrm{d}F_1=\begin{pmatrix}0&1\\u(x)&0\end{pmatrix}\mathrm{d}x,\quad F_2^{-1}\mathrm{d}F_2=\begin{pmatrix}0&1\\v(y)&0\end{pmatrix}\mathrm{d}y$$
をみたすものとする.
$$f(x,y)=F_1(x)F_2(y)^{-1}$$
は
$$\langle\mathrm{d}f,\mathrm{d}f\rangle=u(x)^2\,\mathrm{d}x^2+v(y)\,\mathrm{d}y^2+(u(x)v(y)-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
をみたす. したがって, $\det\langle\mathrm{d}f,\mathrm{d}f\rangle\neq0$ であれば f は時間的平坦曲面を与える.

$F_1(x)$, $F_2(y)$ は
$$\det(F^{-1}\mathrm{d}F)=0$$
をみたしているので, holomorphic null curve (lightlike curve) とよばれるものである ([41]). これは $\mathbb{H}^3$ の平坦曲面の表現公式の類似である.

註 5.1 Musso-Nicolodi[69] は AdS_3 の holomorphic null curve を EDS(外微分式系) を用いて研究している. とくに

$$\int (m + k_\gamma)\, \mathrm{d}s$$

という汎函数の臨界点となる閉曲線を EDS(外微分式系) と楕円函数を用いて具体的表記を与えている. また AdS_3 内の平均曲率が 1 である時間的曲面についても $\mathbb{H}^3$ 内の平均曲率が 1 の曲面と類似の表現公式が得られている ([41] 参照). この意味でも AdS_3 が $\mathbb{H}^3$ の類似をもつと言える.

6 AdS_3 の極大曲面

$f: M \to \mathrm{AdS}_3$ の空間的で $H = 0$ をみたす曲面 (極大曲面/maximal surface) の構成法はどう考えたらよいだろうか. ガウス・コダッチ方程式を書いてみよう.

空間的曲面 $f: M \to \mathrm{AdS}_3$ の単位法ベクトル場を n とする. (M, f) の第一基本形式, 第二基本形式, 平均曲率, Hopf 微分は次で与えられる.

$$\mathrm{I} = \langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}f \rangle = e^u\, \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}, \quad \mathrm{I\!I} = \langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}n \rangle, \quad Q = -\langle f_{zz}, n \rangle, \ H = -2e^u \langle f_{z\bar{z}}, n \rangle.$$

ガウス曲率 K はリーマン計量 I だけで決まる内的量である. 一方, 第二基本形式と第一基本形式を用いて K が計算できる. K は次の式で求めることができる (負号に注意).

$$K = -\det(\mathrm{I}^{-1}\mathrm{I\!I}).$$

ガウス・コダッチ方程式は次で与えられる.

$$u_{z\bar{z}} - \frac{1}{2}(H^2 + 1)e^u + 2|Q|^2 e^{-u} = 0, \quad Q_{\bar{z}} = \frac{e^u}{2} H_z.$$

臍点のない領域では**符号違い**の sinh-Gordon 方程式 $u_{z\bar{z}} - (H^2 + 1)\sinh u = 0$ が得られる. この場合にも Lawson 対応があり, AdS_3 の極大曲面はミンコフスキー時空 $\mathbb{E}^{1,2}$ の空間的平均曲率一定曲面 ($H = 1$) に対応する. また $\mathbb{S}^3$ のときと同様に次が成立する.

定理 6.1 空間的曲面 $f: M \to \mathrm{AdS}_3$ が単位法ベクトル場 n をもつとする. $g := f^{-1}n : M \to \mathbb{H}^2(-1) \subset \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ と定め, (M, f) の法ガウス写像とよぶ.　このとき次が成立する. f の平均曲率が一定 $\Longleftrightarrow$ g は調和写像.

この事実に基づき, DPW の方法を AdS_3 に対しても $\mathbb{S}^3$ のときと同様に与えることができる. $\mathbb{E}^{1,2}$ の空間的平均曲率一定曲面に対する DPW 法については [10] を参照.

7 Nil_3 の極小曲面

$\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ のリーマン計量を正則断面曲率が $-1/2$, 鉛直断面曲率が $1/\sqrt{8}$ となるよう調整しておくと $H = 1\sqrt{8}$ の曲面に対し, Heisenberg 群の極小曲面が対応する (Lawson 対応の拡張). したがって Nil_3 の極小曲面も AdS_3 の極大曲面と同時に構成できることが期待される.

7.1 Nil_3 の幾何

Thurston の冪零幾何のモデル空間 Nil_3 は $\mathbb{R}^3$ にリー群の構造を

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_1', x_2', x_3') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3' + 2\tau(x_1 x_2' - x_1' x_2))$$

で定め (**Heisenberg 群**), この構造に関し左不変なリーマン計量

$$\mathrm{d}s_\tau^2 := \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \eta_\tau \otimes \eta_\tau, \quad \eta_\tau := \mathrm{d}x_3 + \tau(x_2 \mathrm{d}x_1 - x_1 \mathrm{d}x_2)$$

で与えたものである (τ は 0 でない定数). $\tau = 1$ のとき, $(\eta_1, \mathrm{d}s_1^2)$ は Nil_3 に佐々木構造を定める. とくに $\mathcal{H} = -3$ の佐々木空間形である. 本稿では以下 $\tau = 1/2$ と選ぶ.

Nil_3 の向きを保つ等長変換群は左移動と x_3 軸のまわりの回転で生成される. Nil_3 は Gromov の意味で**概平坦** (almost flat) であることを注意しておく.

正規直交フレームとして

$$e_1 = \partial_{x_1} - x_2 \partial_{x_3}/2, \ e_2 = \partial_{x_2} + x_1 \partial_{x_3}/2, \ e_3 = \partial_{x_3}.$$

をとる.

7.2 スピン幾何・Dirac 作用素

曲面 $f : M \to \mathrm{Nil}_3$ に対し $\alpha = f^{-1}df$ とおき $\alpha' = (\phi_1 e_1 + \phi_1 e_2 + \phi_3 e_3)\mathrm{d}z$ と表す. $\phi_3 = f^*\eta_{1/2}(\partial_z)$ と表せることに注意. 曲面の**スピン構造**を用いて

$$\phi_1 = (\overline{\psi}_2)^2 - \psi_1^2, \ \phi_2 = i\{(\overline{\psi}_2)^2 + \psi_1^2\}, \ \phi_3 = 2\psi_1\overline{\psi}_2.$$

で**スピノル場**$(\psi_1\sqrt{dz}, \psi_2\sqrt{d\bar{z}})$ を定める. $\mathrm{I} = \langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}f \rangle = e^u \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}$, $h := e^{u/2}\eta_{1/2}(n)$ とおくと, 曲面の構造方程式は次の**非線型 Dirac 方程式**で与えられる.

$$D\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix} = 0 \ \text{with} \ D = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U} & 0 \\ 0 & \mathcal{V} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{V} = -\frac{H}{2}e^{u/2} + \frac{i}{4}h.$$

この非線型 Dirac 方程式は Lax 方程式 $\Psi_z = \Psi U$, $\Psi_{\bar{z}} = \Psi V$ に書き換えられる. ただし

$$U = \begin{pmatrix} w_z/4 + H_z \exp(-w/2 + u/2)/2 & \exp(w/2) \\ B\exp(-w/2) & -w_z/4 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} -w_{\bar{z}}/4 & \bar{B}\exp(-w/2) \\ \exp(w/2) & w_{\bar{z}}/4 + H_{\bar{z}} \exp(-w/2 + u/2)/2 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{4}(2H + i)\left(A + \frac{\phi_3^2}{2H + i}\right), \ A\,\mathrm{d}z^2 = \mathrm{II}^{(2,0)}.$$

この Lax 方程式にスペクトル径数を次のようにして挿入できる.

$$U_\lambda := \begin{pmatrix} w_z/4 + H_z \exp(-w/2 + u/2)/2 & -\lambda^{-1}\exp(w/2) \\ \lambda^{-1}B\exp(-w/2) & -w_z/4 \end{pmatrix},$$

$$V_\lambda := \begin{pmatrix} -w_{\bar{z}}/4 & -\lambda \bar{B} \exp(-w/2) \\ \lambda \exp(w/2) & w_{\bar{z}}/4 + H_{\bar{z}} \exp(-w/2 + u/2)/2 \end{pmatrix}.$$

定理 7.1 (零曲率表示) 次の 3 つの性質は互いに同値.

- f は CMC 曲面.
- $\alpha_\lambda = U_\lambda dz + V_\lambda d\bar{z}$ とおくと, すべての $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対し, $\mathrm{d}\alpha_\lambda + [\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda]/2 = 0$.
- $\mathrm{Ad}(F)\mathrm{diag}(i, -i) : \mathbb{D} \to \mathrm{GL}_2\mathbb{C}/\mathrm{GL}_1\mathbb{C}$ は調和写像.

系 7.1 (零曲率表示) 次の 3 つの性質は互いに同値.

- f は極小曲面.
- $\alpha_\lambda = U_\lambda dz + V_\lambda d\bar{z}$ とおくと, すべての $\lambda \in \mathbb{S}^1$ に対し, $\mathrm{d}\alpha_\lambda + [\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda]/2 = 0$ で $\alpha_\lambda \in \mathfrak{su}_{1,1}$.
- $\mathrm{Ad}(F)\mathrm{diag}(i, -i) : \mathbb{D} \to \mathrm{SU}_{1,1}/\mathrm{U}_1 = \mathbb{H}^2$ は調和写像.

曲面 $f : M \to \mathrm{Nil}_3$ に対し, 法ガウス写像 $g := f^{-1}n : M \to \mathbb{S}^2 \subset \mathfrak{nil}_3 = \mathbb{E}^3$ を考える. 立体射影 $\mathrm{p} : \mathbb{S}^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ による g の像も同じ記号 g で表すことにする. f が「x_3 軸に平行な平面でない」という仮定の下では, $|g| \neq 1$ であり, $|g| < 1$(または $|g| > 1$) と仮定できる. 今, 上半球面にポアンカレ計量を与えよう. すると f が極小であることと g が調和であることが同値である. さらに上半球面を $\mathrm{Ad}(\mathrm{SU}_{1,1})\mathrm{diag}(i, -i)$ と同一視すれば g は $\mathrm{Ad}(F)\mathrm{diag}(i, -i)$ と一致する.

定理 7.2 (Dorfmeister-I-小林) 以下の手順で Nil_3 の極小曲面が得られる.

- Lie 環 $\mathfrak{su}_{1,1}$ をリー環 $\mathfrak{nil}_3$ と線型空間として同一視する.
- Ψ_λ を $\mathbb{H}^2 = \mathrm{SU}_{1,1}/\mathrm{U}_1$ への調和写像に対する extended frame とする.

$$m_\lambda := -i\lambda \partial_\lambda \Psi_\lambda \cdot \Psi_\lambda^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{Ad}(\Psi_\lambda)\mathrm{diag}(i, -i).$$

  を計算する.
- 続けて

$$\tilde{m}_\lambda := (\textbf{off diagonal part of } m_\lambda) - \frac{i}{2}\lambda\,(\textbf{diagonal part of } \partial_\lambda m_\lambda)$$

  とすれば $f_\lambda = \exp \tilde{m}_\lambda$ は Nil_3 の極小曲面である.

一般化された Lawson 対応により $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ の $H = 1/\sqrt{8}$ 曲面も得られるが, immersion formula がまだ見つかっていない. Nil_3 の場合の詳細については [25] を参照されたい.

例 7.1 ポテンシャルとして

$$\xi = -\lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dz$$

を選ぶ. 初期条件 $C(z = 0, \lambda) = \mathrm{diag}(1/\sqrt{i}, \sqrt{i})$ を指定すると

$$f(z, \bar{z}; \lambda) = (\lambda^{-1}z + \lambda\bar{z}, i(\lambda\bar{z} + \lambda^{-1}z), 0)$$

が得られる (horizontal plane). 初期条件を変えて, **horizontal umbrella** とよばれる曲面

$$x_3 = ax_1 + bx_2 + c$$

も得られる. horizontal plane と horizontal umbrella は負で一定でない曲率をもつことを注意しておく.

例 7.2 ポテンシャルとして

$$\xi = -\lambda^{-1}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} dz/4$$

を選ぶ. 初期条件 $C(z=0,\lambda) = \mathrm{diag}(1/\sqrt{i}, \sqrt{i})$ の下で

$$f(z,\bar{z},\lambda) = (-2i(p-\bar{p}), -\sinh(2(p+\bar{p})), 2i(p-\bar{p})\sinh(2(p+\bar{p}))).$$

を得る. これは双曲放物面 (又曲放物面?) $x_3 = x_1x_2/2$ である. 初期条件を変えることで極小移動曲面 (極小線織面) も得られる. 極小移動曲面については [48] 参照. 平坦な移動曲面については [36] 参照.

例 7.3 ポテンシャルとして

$$\xi = \begin{pmatrix} c & a\lambda^{-1} + b\lambda \\ -a\lambda - b\lambda^{-1} & -c \end{pmatrix} \mathrm{d}z,$$

を選ぶ. ただし $a = -b$, $c = 1/2$. 初期条件を適切に選ぶと回転極小曲面が得られる.

[29] において canonical example とよばれている例はすべて [25] において非線型変数分離法 (DPW 法) で再構成してある.

8 Sol_3 の極小曲面

可解幾何のモデル空間 Sol_3 内の極小曲面の構成法についても述べておく. $\mathbb{S}^3$ は単純リー群の構造をもち, 佐々木空間形でもあった. 一方, $\mathbb{H}^3$ は可解リー群の構造をもち, 剱持多様体でもあった. Sol_3 は可解リー群の構造と等質接触構造を備えている*12. $\mathbb{H}^3$ の極小曲面に対しては Góes-Simões と國分による表現公式が知られている. そこで Sol_3 についても $\mathbb{H}^3$ をお手本として極小曲面の構成法を考えることにしよう.

$(\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2$ とし $\mathbb{R}^3(x_1,x_2,x_3)$ にリー群の構造を

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(x_1',x_2',x_3') = (x_1 + e^{\mu_1 x_3}x_1', x_2 + e^{\mu_2 x_2}x_2', x_3 + x_3').$$

*12 Sol_3 は佐々木多様体の構造も剱持多様体の構造ももたず, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$ に比べ扱いにくい空間である. 断面曲率は正の値も負の値もとる. 接触リーマン多様体としては contact (κ,μ)-space とよばれる等質接触リーマン空間の例になっている. 3 次元等質接触リーマン空間については [37] を参照.

で定め, この構造に関し左不変なリーマン計量を

$$\mathrm{d}s^2_{\mu_1,\mu_2} := e^{-2\mu_1 x_3}\mathrm{d}x_1^2 + e^{-2\mu_2 x_3}\mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2$$

で与える [79]. $G(\mu_1,\mu_2) := (\mathbb{R}^3, \mathrm{d}s^2_{\mu_1,\mu_2})$ は等質リーマン空間であり線型リー群

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & e^{\mu_1 x_3} & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & e^{\mu_2 x_3} & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

と同型である. とくに $(\mu_1,\mu_2) \neq (0,0)$ のときは

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} e^{\mu_1 x_3} & 0 & x_1 \\ 0 & e^{\mu_2 x_3} & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

と同型である. $G(\mu_1,\mu_2)$ は以下の例を含む.

例 8.1 (ユークリッド空間) $G(0,0)$ はユークリッド空間 $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, +)$ と同型かつ等長である.

例 8.2 (双曲空間) $\mu_1 = \mu_2 = c \neq 0$ のとき $G(c,c)$ は $\mathbb{H}^3(-c^2)$ の warped product model:

$$\mathbb{H}^3(-c^2) = (\mathbb{R}^3(x_1,x_2,x_3), e^{-2cx_3}\{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2\} + \mathrm{d}x_3^2).$$

である. とくに $c = \pm 1$ のとき, $\eta := \mathrm{d}x_3$ と選ぶと $\mathbb{H}^3(-1)$ は**剱持多様体**である.

例 8.3 (可約対称空間 $\mathbb{H}^2(-c^2) \times \mathbb{E}^1$) $(\mu_1,\mu_2) = (0,c)$, ただし $c \neq 0$ のとき $G(0,c)$ はユークリッド直線 $\mathbb{E}^1(x^1)$ と双曲平面

$$\mathbb{H}^2(-c^2) = (\mathbb{R}^2(x_2,x_3), e^{-2cx_3}\mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2)$$

のリーマン積である.

例 8.4 (Solvmanifold) Thurston 幾何における可解幾何のモデル空間 Sol_3 は $G(1,-1)$ で与えられる. $G(1,-1)$ は光錐座標 (u,v) で表示されたミンコフスキー平面 $\mathbb{E}^{1,1} = (\mathbb{R}^2(u,v), \mathrm{d}u\mathrm{d}v)$ の等長変換群の連結成分

$$E(1,1) := \left\{ \left(\begin{array}{ccc} e^{x_3} & 0 & x_1 \\ 0 & e^{-x_3} & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

と同型である. Sol_3 の等長変換群は Sol_3 自身である. $\mathrm{Sol}_3 = G(1,-1)$ において

$$\eta := -\frac{1}{2}(e^{-x_3}\mathrm{d}x_1 + e^{x_3}\mathrm{d}x_2), \quad g := \frac{1}{4}\mathrm{d}s^2_{1,-1}$$

と調整すると $(G(1,-1), \eta, g)$ は接触リーマン多様体である. また Sol_3 は $\mathbb{H}^4$ 内の type number 2 の超曲面として実現できる (高橋の B-manifold, [76]). Kowalski は Sol_3 が 3 次元で唯一のリーマン対称空間でないリーマン一般対称空間であることを示した [61].

國分は [60] においては $G(c,c)$ を用いて $\mathbb{E}^3$ 内の極小曲面に対する Weierstraß-Enneper の表現公式を $\mathbb{H}^3(-c^2)$ の極小曲面に対する剱持型表現公式を得た (剱持の表現公式については [56] を参照).

Góes と Simões[31] でも同様な表現公式が得られているが, [60] では 3 次元のときにデータの意味 (法ガウス写像) を明らかにしている. さらに一般の次元でも考察している ([31] は 3 次元と 4 次元のみ).

國分のアイディアを $G(\mu_1,\mu_2)$ に対して一般化してみよう. 曲面 $f: M \to G(\mu_1,\mu_2)$ に対し, いままでと同様に法ガウス写像 g を考える. さらに立体射影 $\mathrm{p}: \mathbb{S}^2 \subset \mathfrak{g}(\mu_1,\mu_2) \to \mathbb{C}$ による g の像も同じ記号 g で表すことにする.

定理 8.1 **([34])** F と g を単連結領域 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ で定義された $\overline{\mathbb{C}}$ 値の函数で

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}|F|^2 g\{\mu_1(1-\bar{g}^2) - \mu_2(1+\bar{g}^2)\}, \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{4}\{\mu_1(1+g^2)(1-\bar{g}^2) + \mu_2(1-g^2)(1+\bar{g}^2)\}\bar{F} \tag{8.2}$$

をみたすものとする. このとき

$$f(z,\bar{z}) = 2\int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\left(e^{\mu_1 x_3}\frac{1}{2}F(1-g^2), e^{\mu_2 x_3}\frac{\sqrt{-1}}{2}F(1+g^2), Fg\right)\mathrm{d}z \tag{8.3}$$

は $G(\mu_1,\mu_2)$ への弱共形的な調和写像を与える.

(8.1) と (8.2) から F を消去し, 法ガウス写像 g についての偏微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} g_{z\bar{z}} &- \frac{2g\{\mu_1(1-\bar{g}^2) - \mu_2(1+\bar{g}^2)\}g_z g_{\bar{z}}}{\mu_1(1+g^2)(1-\bar{g}^2) + \mu_2(1-g^2)(1+\bar{g}^2)} \\ &+ \frac{4\bar{g}(1-g^4)(\mu_1^2-\mu_2^2)|g_{\bar{z}}|^2}{(\mu_1^2+\mu_2^2)|1-g^4|^2 + \mu_1\mu_2\{(1+g^2)^2(1-\bar{g}^2)^2 + (1+\bar{g}^2)^2(1-g^2)^2\}} = 0. \end{aligned} \tag{8.4}$$

(8.4) は何らかの計量に関する調和写像の方程式と思えるだろうか.

定理 8.2 **([40])** 偏微分方程式 (8.4) が $\overline{\mathbb{C}}(w,\bar{w})$ 上の何らかの (特異) リーマン計量に関する調和写像方程式であるのは $\mu_1^2 = \mu_2^2$ のときに限る.

(1) $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$ のとき (8.4) は

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{2|g|^2\bar{g}}{1-|g|^4}\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{8.5}$$

となる. これは國分計量 $(\mathrm{d}w\mathrm{d}\bar{w})/|1-|w|^4|$ に関する調和写像方程式である.

(2) $\mu_1 = -\mu_2 \neq 0$ のとき (8.4) は

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{2g}{g^2-\bar{g}^2}\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{8.6}$$

となる. これは特異リーマン計量 $(\mathrm{d}w\mathrm{d}\bar{w})/|w^2-\bar{w}^2|$ に関する調和写像方程式である.

この事実により國分の公式の類似の表現公式が Sol_3 に対して得られる.

系 8.1 $g : \mathfrak{D} \to \left(\overline{\mathbb{C}}(w, \bar{w}), (\mathrm{d}w\mathrm{d}\bar{w})/|w^2 - \bar{w}^2|\right)$ を調和写像とする. F を

$$F = \frac{2\bar{g}_z}{g^2 - \bar{g}^2}$$

で定めると

$$f(z, \bar{z}) = 2\int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\left(e^{x_3}\frac{1}{2}F(1-g^2), e^{-x_3}\frac{\sqrt{-1}}{2}F(1+g^2), Fg\right)\mathrm{d}z$$

は Sol_3 への弱共形的調和写像を与える.

Desmontes は上の調和写像方程式の特殊な解を用いて単連結でなく有限位相をもつ Sol_3 内の極小曲面の例を与えた [21].

註 8.1 3 次元空間形の主曲率一定曲面 (等径曲面/isoparametric surface) の分類はよく知られている (Levi-Civita などによる). これらは第二基本形式が平行な曲面のクラスと一致する. 3 次元単連結等質リーマン空間の全測地的曲面は塚田和美により分類されている [80]. 3 次元単連結等質リーマン空間内の第二基本形式が平行な曲面は等長群の次元が 4 の場合が [4, 5] で分類された. 等長群の次元が 3 の場合については Van der Veken と筆者により分類された [52, 53].

9 曲線論

3 次元接触多様体の曲線で, 重要なものは, Reeb flow(レーブ・ベクトル場の積分曲線) と Legendre 曲線である. どちらも接触構造のみで定義される概念である. 3 次元接触リーマン多様体において, 計量と接触構造の両方に依存して定まる曲線のクラスで研究する価値・意義のあるものを探してみたい.

空間曲線の古典的な話題のひとつに**定傾曲線** (constant slope curve) がある ([64, 75]). 接ベクトルが定方向と定角をなす曲線のことである.

定理 9.1 (Bertrand-Lancret-de Saint Venant) 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ 内の曲線が定傾曲線であるための必要十分条件は曲率と捩率の比が一定であること.

Barros [2] はこの結果を 3 次元空間形に拡張した (ローレンツ空間形への一般化も知られている [30]).

この古典的結果を参考にして, 3 次元接触リーマン多様体を考えよう. レーブ・ベクトル場 ξ と曲線 γ のなす角 θ を γ の接触角とよぶ. 接触角が $0, \pi$ であれば γ は $\pm\xi$ の積分曲線 (Reeb flow) であり, $\theta = \pm\pi/2$ のときは Legendre 曲線である ([3]). 接触角が定数であるとき, γ を slant curve とよぶ [15]. この名称は B. Y. Chen による slant はめ込みをまねたものである.

3 次元佐々木多様体においては slant curve がいろいろな場面で登場する．ここでは 2 つ例を紹介する．

例 9.1 (接触磁場) 3 次元佐々木多様体において ϕ をローレンツ力と考える．

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \phi\gamma'$$

をみたす曲線 γ を contact magnetic flow とよぶ．contact magnetic flow は slant helix であり接触角, 曲率, 捩率は

$$(\tau - 1)/\kappa = \cot\theta$$

をみたす (Cabrerizo, Fernández, Gómez [11])．

Taubes [77] は 3 次元の場合に Weinstein 予想 [82] を解決した*13．すなわちコンパクトな 3 次元有向接触多様体*14のレーブ・ベクトル場は閉軌道をもつことを証明した．Weinstein 予想のミニチュア (接触リーマン幾何版) として「3 次元接触リーマン多様体の接触磁場は閉軌道をもつか」を提案することができる ([49] 参照)．

例 9.2 (重調和曲線) 正則断面曲率 $\mathcal{H}$ の 3 次元佐々木空間形 $\mathbb{M}^3(\mathcal{H})$ 内の (測地線でない) 重調和曲線 (biharmonic curve) は slant helix で

$$\kappa^2 + \tau^2 = 1 + (\mathcal{H} - 1)\sin^2\theta$$

をみたす．3 次元佐々木空間形内の重調和曲線は [16] で分類されている．

註 9.1 (重調和写像) リーマン多様体の間の写像 $f : (M, g) \to (N, h)$ に対し**重エネルギー** (bi-energy) を

$$E_2(f) = \int \frac{1}{2}|\tau(f)|^2\, dv_g$$

で定める．この汎函数の臨界点となる f を**重調和写像** (biharmonic map) とよぶ．f が調和ならば重調和である．f が等長はめ込みで, 変分を法変分 (normal variation) に制限したときの変分問題の解は重極小はめ込みとよばれる (Loubeau, Montaldo [67])．2 次元空間形の重極小曲線は [44] で分類してある (曲率がヤコビの楕円函数 cn で書かれる．初等函数の場合もある)．曲線に関する変分問題は一般には大域解を持たない．実際, 重極小曲線で曲率が有限時間で blow-up する例が存在する．それらは大域解に拡張できない．キルヒホッフ弾性棒の大域解については川久保哲の研究がある [54]．

註 9.2 3 次元接触リーマン多様体は同伴する CR 構造 (Cauchy-Riemann structure) が積分可能であり, 強擬凸 CR 多様体になっている．そこで Levi-Civita 接続の代わりに田中・Webster 接続を用いて曲線論・曲面論を展開することが考えられる．田中・Webster 接続を用いた 3 次元佐々木多様体内の曲線論・曲面論についての試論が [18, 19, 42, 43, 45] にある．

---

*13 「コンパクト接触多様体 M^{2n+1} が $H^1(M^{2n+1}; \mathbb{R}) = \{0\}$ をみたせばレーブ・ベクトル場は閉軌道をもつ」．とくに Taubes は $H^1(M^3; \mathbb{R})$ に関する条件は不要であることを証明した．

*14 3 次元有向の仮定の下では大域的な接触形式が存在する．

謝辞

講演の機会をつくってくださった小林真平先生, AdS_3 についていろいろとご教示くださった佐藤勇二先生, 座長をお引き受けくださった佐々木武先生, 草稿の誤りをご指摘くださった入江博先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] R. Aiyama(相山玲子), K. Akutagawa(芥川和雄), The Dirichlet problem at infinity for harmonic map equations arising from constant mean curvature surfaces in the hyperbolic 3-space, Calc. Var. **14**(2002), 399–428.

[2] M. Barros, General helices and a theorem of Lancret, Proc. Amer. Math. Soc. **125**(1997), 1503–1509.

[3] C. Baikoussis, D. E. Blair, On Legendre curves in contact 3-manifolds, Geom. Dedicata **49**(1994), 135–142.

[4] M. Belkhelfa, F. Dillen, J. Inoguchi, Parallel surfaces in the real special linear group $SL(2,\mathbb{R})$, Bull. Austral. Math. Soc. **65**(2002), 183–189.

[5] M. Belkhelfa, F. Dillen, J. Inoguchi, Surfaces with parallel second fundamental form in 3-dimensional Bianchi-Cartan-Vranceanu spaces, in: *PDE's, Submanifolds and Affine Differential Geometry* (Warsaw, 2000), (B. Opozda, U. Simon and M. Wiehe eds.) Banach Center Publ. **57**(2002), 67–87.

[6] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progress in Math. **203**, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2nd edition, 2010.

[7] C. P. Boyer, The Sasakian geometry of the Heisenberg group, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) **52**(100)(2009), no. 3, 251–262.

[8] C. P. Boyer, K. Galicki, *Sasakian Geometry*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2008.

[9] D. Brander, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi(小林真平), Constant Gaussian curvature surfaces in the 3-sphere via loop groups, Pacific J. Math., to appear.

[10] D. Brander, W. Rossman, N. Schmitt, Holomorphic representation of constant mean curvature surfaces in Minkowski space: consequences of non-compactness in loop group methods, Adv. in Math. **223**(2010), no. 3, 949–986.

[11] J. L. Cabrerizo, M. Fernández and J. S. Gómez, The contact magnetic flow in 3D Sasakian manifolds, J. Phys. A: Math. Theor. **42**(2009), no. 19, 195201:1–10.

[12] J. T. Cho, T. Hamada(濱田龍義), J. Inoguchi, On three-dimensional real hypersurfaces in complex space forms, Tokyo J. Math. **33**(2010), no. 1, 31–47.

[13] J. T. Cho, J. Inoguchi, Pseudo-symmetric contact 3-manifolds, J. Korean Math. Soc. **42**(2005), no. 5, 913–932.

[14] J. T. Cho, J. Inoguchi, Pseudo-symmetric contact 3-manifolds II– When is the tangent sphere bundle over a surface pseudo-symmetric ?, Note Mat. **27**(2007), no. 1, 119–129.

[15] J. T. Cho, J. Inoguchi, J.-E. Lee, On slant curves in Sasakian 3-manifolds, Bull. Austral. Math. Soc. **74**(2006), 359–367.

[16] J. T. Cho, J. Inoguchi, J.-E. Lee, Biharmonic curves in 3-dimensional Sasakian space forms, Annali di Mat. Pura Appl. **186**(2007), no. 4, 685–701.

[17] J. T. Cho, J. Inoguchi, J.-E. Lee, Pseudo-symmetric contact 3-manifolds III, Colloq. Math. **114**(2009), no. 1, 77–98.

[18] J. T. Cho, J. Inoguchi, J.-E. Lee, Affine biharmonic submanifolds in 3-dimensional pseudo-Hermitian geometry, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **79**(2009), no. 1, 113-—133.

[19] J. T. Cho, J. Inoguchi, J.-E. Lee, Parabolic geodesics in Sasakian 3-manifolds, Canadian Math. Bull. **54**(2011), no. 3, 396–410.

[20] M. Dajczer, K. Nomizu(野水克己), On flat surfaces in S^3_1 and H^3_1, in: *Manifolds and Lie Groups–papers in honor of Yozo Matsushima* (J. Hano et al eds.), Progress in Math. **14**(1981), Birkhäuser, Boston, pp. 71–108.

[21] C. Desmonts, Constructions of minimal periodic surfaces and minimal annuli in Sol_3, preprint, `arXiv:1311.5004v1[math.DG]`.

[22] R. Deszcz, On pseudosymmetric spaces, Bull. Soc. Math. Belg. **44**(1992), 1–34.

[23] S. L. Druţă-Romaniuc, J. Inoguchi, M.-I. Munteanu, A. I. Nistor, Magnetic curves in Sasakian and cosymplectic manifolds, submitted.

[24] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi(小林真平), Constant mean curvature surfaces in hyperblic 3-space via loop groups, J. reine angew. Math., to appear.

[25] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi(小林真平), A loop group method for minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group, preprint, 2012.

[26] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi(小林真平), A loop group method for harmonic maps into Lie groups, preprint, 2013.

[27] J. Dorfmeister, F. Pedit, H. Wu, Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces, Comm. Anal. Geom. **6**(1998), no. 4, 633–668.

[28] S. Espinar, H. Rosenberg, Complete constant mean curvature surfaces in homogeneous spaces, Comment. Math. Helv. **86**(2011), no. 3, 659–674.

[29] I. Fernandez, P. Mira, Holomorphic quadratic differentials and the Bernstein problem in Heisenberg space, Trans. Amer. Math. Soc. **361**(2009), no. 11, 5737–5752.

[30] A. Ferrández, Riemannian versus Lorentzian submanifolds, some open problems, in: *Proc. Workshop on Recent Topics in Differential Geometry*, Santiago de Compostela, Depto. Geom. y Topología, Univ. Santiago de Compostela, **89**(1998), pp.109–130.

[31] C. C. Góes, P. A. Q. Simões, The generalized Gauss map of minimal surfaces in H^3 and H^4, Bol. Soc. Brasil Mat. **18**(1987), 35–47.

[32] C. Gorodski, Delaunay-type surfaces in the 2×2 real unimodular group, Ann. Mat. Pura Appl. **180**(2001), 211–221.

[33] O. Ikawa(井川治), Motion of charged particles in homogeneous Kähler and homogeneous Sasakian Manifolds, Far East J. Math. Sci. **14**(2004) 283–302.

[34] J. Inoguchi, Minimal surfaces in 3-dimensional solvable Lie groups, Chinese Ann. Math. B. **24**(2003), 73–84, Part II, Bull. Austral. Math. Soc. **73**(2006), no. 3, 365–374.

[35] J. Inoguchi, Invariant minimal surfaces in the real special linear group of degree 2, Italian J. Pure Appl. Math. **16**(2004), 61–80.

[36] J. Inoguchi, Flat translation invariant surfaces the 3-dimensional Heisenberg group, J. Geom. **82**(2005), 83–90

[37] J. Inoguchi, On homogeneous contact 3-manifolds, Bull. Fac. Edu. Utsunomiya Univ. **59** (2009), 1–12.

[38] J. Inoguchi, 3 次元等質空間内の曲面と可積分系, RIAM 講究録 24A0-S3(2013), 58–63.

[39] J. Inoguchi, K. Kuwabara(桑原健治), H. Naitoh(内藤博夫), Grassmann geometry on the 3-dimensional Heisenberg group, Hokkaido Math. J. **34**(2005), no. 2, 375–391.

[40] J. Inoguchi, S. Lee, A Weierstrass type representation for minimal surfaces in Sol, Proc. Amer. Math. Soc. **136**(2008), no. 8, 2209–2216.

[41] J. Inoguchi, S. Lee, Null curves in Minkowski 3-space, Internat. Elect. J. Geom. **1**(2008), no. 2, 40–83.

[42] J. Inoguchi, J.-E. Lee, Submanifolds with harmonic mean curvature in pseudo-Hermitian geometry, Archiv. Math. Brno **48**(2012), no. 1, 15–26.

[43] J. Inoguchi, J.-E. Lee, Almost contact curves in normal almost contact 3-manifolds, J. Geom. **103**(2012), 457–474.

[44] J. Inoguchi, J.-E. Lee, Biminimal curves in 2-dimensional space forms, Commun. Korean Math. Soc. **27**(2012), no. 4, 771–780.

[45] J. Inoguchi, J.-E. Lee, Affine biharmonic curves in 3-dimensional homogeneous geometries, Medit. J. Math. **10**(2013), no. 1, 571–592.

[46] J. Inoguchi, J.-E. Lee, On slant curves in normal almost contact metric 3-manifolds, Beit. Algebra Geom., to appear. (`DOI 10.1007/s13366-013-0175-1`).

[47] J. Inoguchi, J.-E. Lee, Slant curves in 3-dimensional almost contact metric geometry, preprint.

[48] J. Inoguchi, R. López, M.-I. Munteanu, Minimal translation surfaces in the Heisenberg group Nil_3, Geom. Dedicata **161**(2012), 221–231.

[49] J. Inoguchi, M.-I. Munteanu, Periodic magnetic curves in elliptic Sasakian space forms, preprint, `arXiv:1310.2899v1[math.DG]`.

[50] J. Inoguchi, H. Naitoh(内藤博夫), Grassmann geometry on the 3-dimensional unimodular Lie groups I, II, Hokkaido Math. J. **38**(2009), 427–496, **40**(2011), 411–429.

[51] J. Inoguchi, M. Toda, Timelike minimal surfaces via loop groups, Acta Appl. Math. **83**(2004), 313–355.

[52] J. Inoguchi, J. Van der Veken, Parallel surfaces in motion groups, $E(1,1)$ and $E(2)$, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **14**(2007), no. 2, 317–320.

[53] J. Inoguchi, J. Van der Veken, A complete classification of parallel surfaces in three-dimensional homogeneous spaces, Geom. Dedicata **131**(2008), 159–172.

[54] S. Kawakubo(川久保哲), Global solutions of the equation of the Kirhihoff elastic rod in space forms, Bull. Austral. Math. Soc. **88**(2013), no. 1, 70–80.

[55] K. Kenmotsu(剱持勝衛), A class of almost contact Riemannian manifolds, Tôhoku Math. J. **24**(1972), 93–103.

[56] K. Kenmotsu(剱持勝衛), Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature, Math. Ann. **245**(1979), 89–99.

[57] Y. Kitagawa(北川義久), Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in S^3, J. Math. Soc. Japan **40**(1988), 457–476.

[58] 北川義久, 3 次元球面内の平坦トーラス, 数学, **57**(2005), no. 2, 164–177.

[59] M. Kokubu(國分雅敏), On minimal surfaces in the real special linear group $SL(2,\mathbf{R})$, Tokyo J. Math. **20**(1997), 287–297.

[60] M. Kokubu(國分雅敏), Weierstrass representation for minimal surfaces in hyperbolic space, Tôhoku Math. J. **49**(1997), 367–377.

[61] O. Kowalski *Generalized Symmetric Spaces*, Lecture Notes in Math. **805**(1980), Springer Verlag, Berlin.

[62] I. M. Kricever, An analogue of d'Alambert's formula of the principal chiral field and for sine-Gordon equation, Soviet Math. Dokl. **22**(1980), 79–84.

[63] K. Kuwabara(桑原健治), Grassmann geometry on the groups of rigid motions on the Euclidean and Minkowski planes, Tsukuba J. Math. **30**(2006), 49–59.

[64] M. A. Lancret, Mémoire sur les courbes à double courbure, Mémoires présentés à l'Institut **1**(1806), 416–454.

[65] H. B. Lawson Jr., Complete minimal surfaces in S^3, Ann. of Math. (2) **92**(1970), 335–374.

[66] M. A. León-Guzmán, P. Mira, J. A. Pastor, The space of Lorentzian flat tori in anti-de Sitter 3-space, Trans. Amer. Math. Soc. **363**(2011), no. 12, 6549–6573.

[67] E. Loubeau, S. Montaldo, Biminimal immersions, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **51**(2008), no. 2, 421–437.

[68] M. Magid, Isometric immersions of Lorentz space with parallel second fundamental forms, Tsukuba J. Math. **8**(1984), 31–54.

[69] E. Musso, L. Nicolodi, Closed trajectories of a particle model on null curves in anti-de

Sitter 3-space Class. Quantum Grav. **24**(2007), 5401–5411.

[70] Z. Olszak, Normal almost contact manifolds of dimension three, Annales Pol. Math. **47**(1986), 42–50.

[71] D. Perrone, Homogeneous contact Riemannian three-manifolds, Illinois J. Math. **13**(1997), 243—256.

[72] U. Pinkall, Hopf tori in S^3, Invent. Math. **81**(1985), 379–386.

[73] K. Pohlmeyer, Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints, Comm. Math. Phys. **46**(1976), 207–221.

[74] S. Sasaki(佐々木重夫), On complete surfaces with Gaussian curvature zero in 3-sphere, Colloq. Math. **26**(1972), 165–174.

[75] D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley Press Inc., Cambridge, Mass., 1950, Reprint of the second edition, Dover, New York, 1988.

[76] T. Takahashi(高橋恒郎), An isometric immersion of a homogeneous Riemannian manifold of dimension 3 in the hyperbolic space, J. Math. Soc. Japan **23**(1971), 649–661.

[77] C. H. Taubes, The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture, Geom. Topol. **11**(2007), 2117–2202.

[78] W. M. Thurston, *Three-dimensional Geometry and Topology* I, Princeton Math. Series., vol. **35** (S. Levy ed.), 1997.

[79] F. Tricerri and L. Vanhecke, *Homogeneous Strctures on Riemannian manifolds*, London Math. Soc. Lecture Note Series **83**, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[80] K. Tsukada(塚田和美), Totally geodesic submanifolds of Riemannian manifolds and curvature-invariant subspaces, Kōdai Math. J. **19**(1996), 395–437.

[81] S. Verpoort, Hypersurfaces with a parallel higher fundamental form, preprint.

[82] A. Weinstein, On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorems, J. Differ. Eq. **33**(1979), 353–358.

[83] W. J. Zakrzewski, *Low-dimensional Sigma Models*, Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1989.